

Ejercicios de Análisis Matemático I

Números complejos

1. Calcula los módulos de los siguientes números complejos:

a) $(-1 + i)^9(2 - i)$ b) $\frac{5 - \sqrt{3}i}{\sqrt{2} - i(\sqrt{5} + 1)}$ c) $\frac{(2 + i\sqrt{5})(1 + i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5} + i\sqrt{3}}$

2. Calcula los números complejos $z = x + iy$ tales que el número $w = \frac{2z - 1}{z - 2i}$ es:

- a) Un número real.
- b) Un número imaginario puro.
- c) Un número de módulo 1.

3. Expresa en forma polar los siguientes números complejos.

a) $-\sqrt{3} - i$ b) $-\sqrt{3} + i$ c) $\frac{3}{\sqrt{3} + i}$ d) $\frac{1 + i\sqrt{3}}{(1 + i)^2}$

4. Calcula $\arg(zw)$ y $\arg\left(\frac{z}{w}\right)$ supuestos conocidos $\arg z$ y $\arg w$.

5. Expresa los siguientes números en forma cartesiana:

a) $(-1 + i\sqrt{3})^{11}$ b) $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^6$ c) $(-\sqrt{3} + i)^{13}$

6. Sea $z = x + iy$. Supuesto que $|z| = 1$, $z \neq 1$, $z \neq -i$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z - 1}{z + i}\right) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } 1 - x + y > 0 \\ -3\pi/4 & \text{si } 1 - x + y < 0 \end{cases}$$

7. Resuelve la ecuación de segundo grado $z^2 - 4iz - 4 + 2i = 0$

8. Calcula todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $z^4 = i$ b) $z^3 = -1 + i\sqrt{3}$ c) $z^4 - i\sqrt{3}z^2 - 1 = 0$

9. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre prueba que $\cos 4\varphi = 8 \cos^4 \varphi - 8 \cos^2 \varphi + 1$.